Jakub Juránek
UČO 393110

1.64 Určete počet kvádru, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla nejvýše rovná deseti. Kolik je v tomto počtu krychlí?

Kvádr $a \times b \times c, \quad a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 10\}$
$a \times b \times c = c \times a \times b$ - kvádr určený délkami stran je 3-prvkový soubor z prvků 10 druhů, neboli 3-prvková kombinace s opakováním z prvků 10 druhů. Počet všech kvádrů je tedy

$$K_0(3, 10) = P_0(3, 9) = \frac{12!}{3!9!} = 220.$$

Krychle je kvádr $a \times a \times a, \quad a \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, je jich tedy 10.

1.65 V novinovém stánku je ke koupi deset druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit

a) 15 pohledů
Každý nákup je 15-prvkový soubor z prvků 10 druhů, neboli 15-prvkové kombinace s opakováním z prvků 10 druhů. Způsobů koupě je tedy

$$K_0(15, 10) = P_0(15, 9) = \frac{24!}{15!9!} = 1\,307\,504.$$

b) 51 pohledů
Nejprve postupujme, jako bychom měli ne 50, ale 51 exemplářů každého druhu.
Každý nákup je 51-prvkový soubor z prvků 10 druhů, neboli 51-prvkové kombinace s opakováním z prvků 10 druhů. Takovýchto způsobů koupě je tedy

$$K_0(51, 10) = P_0(51, 9) = \frac{60!}{51!9!} = 14\,783\,142\,660.$$

Ovšem k dispozici je pouze po 50 exemplářích, tudíž nákup 51 stejných pohledů není možný. Těchto nákupů je 10 a musíme je od předchozího počtu odečíst.
Odpověď:

$$14\,783\,142\,660 - 10 = 14\,783\,142\,650$$

c) 8 různých pohledů
Každý nákup je 8-prvková množina z 10 prvků, tedy 8-prvkovou kombinaci z 10 prvků. Způsobů nákupů je

$$K(8, 10) = \binom{10}{8} = 45.$$

1.66 Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou jedním z čísel $4, 5, 6, 7$.

Vidíme, že pro libovolnou trojici z čísel $4, 5, 6, 7$ je splněna trojúhelníková nerovnost.
Trojúhelník určený délkami stran je 3-prvkový soubor z prvků 4 druhů, neboli 3-prvková kombinace s opakováním z prvků 4 druhů. Počet všech trojúhelníků je tedy

$$K_0(3, 4) = P_0(3, 3) = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

1.67 Ze všech bílých šachových figurek bez krále a dámy (tj. z osmi pěšců, dvou věží, dvou jezdců a dvou střelců) vybereme a) trojici, b) dvojici. Jaký je počet pro jejich složení?

a) Nejprve postupujme, jako bychom měli od všech druhů figurek tři exempláře.
Vybíráme 3-prvkový soubor z prvků 4 druhů, neboli 3-prvkové kombinace s opakováním z prvků 4 druhů. Takovýchto možností pro složení je

$$K_0(3,4) = P_0(3,3) = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

Ovšem věže, jezdci a střelci jsou k dispozici pouze po dvou, tudíž 3 jejich trojice musíme od předchozího počtu odečíst. Odpověď: $20 - 3 = 17$.
b) Vybíráme 2-prvkový soubor z prvků 4 druhů, neboli 2-prvkové kombinace s opakováním z prvků 4 druhů. Takovýchto možností pro složení je

$$K_0(2,4) = P_0(2,3) = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

1.68 V sadě 32 karet je každá z následujících karet čtyřikrát: sedmička, osmička, devítka, desítka, spodek, svršek, král, eso; karty téže hodnoty jsou přitom rozlišeny těmito „barvami“: červená, zelená, žaludy, kule. Určete, kolika způsoby je možno vybrat čtyři karty, jestliže se

a) rozlišují pouze „barvy“ jednotlivých karet;
Vybíráme 4-prvkový soubor z prvků 4 druhů, neboli 4-prvkové kombinace s opakováním z prvků 4 druhů. Způsobů výběru je tedy

$$K_0(4,4) = P_0(4,3) = \frac{7!}{4!3!} = 35.$$

b) rozlišují pouze hodnoty jednotlivých karet.
Vybíráme 4-prvkový soubor z prvků 8 druhů, neboli 4-prvkové kombinace s opakováním z prvků 8 druhů. Způsobů výběru je tedy

$$K_0(4,8) = P_0(4,7) = \frac{11!}{4!7!} = 330.$$

1.71 Klenotník vybírá do prstenu tři drahokamy; k dispozici má tři rubíny, dva smaragdy a pět safírů. Kolika způsoby může tento výběr provést, považujeme-li kameny téhož druhu za stejné?

Nejprve postupujme, jako bychom měli od všech druhů kamenů tři exempláře.
Jeden výběr je 3-prvkový soubor z prvků 3 druhů, neboli 3-prvkové kombinace s opakováním z prvků 3 druhů. Takovýchto výběrů je

$$K_0(3,3) = P_0(3,2) = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Ovšem smaragdy jsou pouze dva, proto musíme jejich trojici z předchozího počtu odečíst.
Odpověď: $10 - 1 = 9$.

1.72 Určete, kolika způsoby lze přemístit písmena slova Mississippi; kolik z nich nezačíná písmenem M?

Každý anagram je pořadí s opakováním z 1x M, 4x I, 4x S, 2x P. Je jich tedy celkem

$$P_0(1,4,4,2) = \frac{11!}{1!4!4!2!} = 34\,650.$$

Na anagram začínající písmenem M umístíme M na první pozici a zbytek je pořadí s opakováním z 4x I, 4x S, 2x P. Je jich tedy celkem

$$P_0(4,4,2) = \frac{10!}{4!4!2!} = 3\,150.$$

Anagramů nezačínající písmenem M je: $34\,650 - 3\,150 = 31\,500$.

1.73 Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má jednu z velikostí daných čísly $4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Nejprve postupujme bez ohledu na trojúhelníkovou nerovnost.
Trojúhelník určený délkami stran je 3-prvkový soubor z prvků 6 druhů, neboli 3-prvková kombinace s opakováním z prvků 6 druhů. Počet všech trojúhelníků je tedy

$$K_0(3,6) = P_0(3,5) = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$

Ovšem soubory $[4,4,8], [4,4,9], [4,5,9]$ nereprezentují trojúhelníky, neboť nesplňují trojúhelníkovou nerovnost.
Odpověď: $56 - 3 = 53$.

1.74 Knihovna má pět regálů, do každého se vejde 20 knih. Určete, kolika způsoby lze do knihovny umístit 20 knih.

Samotné knihy můžeme uspořádat $P(20) = 20!$ způsoby.
Mezi všemi knihami i před první a za poslední máme celkem 21 pozic, kam umístíme 4 přepážky mezi 5 regály, přičemž na jednu pozici můžeme umístit i více přepážek.
Každé rozložení přepážek je tady 4-prvkový soubor z prvků 21 druhů, neboli 4-prvkové kombinace s opakováním z prvků 21 druhů. Možností rozložení přepážek je tedy

$$K_0(4,21) = P_0(4,20) = \frac{24!}{4!20!}.$$

Odpověď:

$$20!\frac{24!}{4!20!} = \frac{24!}{4!}$$

1.75 V samoobsluze mají čtyři druhy kávy, každý po padesáti gramech. Určete, kolika způsoby lze koupit 250 gramů kávy, jestliže

a) balíčků každého druhu mají dostatečný počet;
Kupujeme 5 balíčků kávy.
Každá koupě je 5-prvkový soubor z prvků 4 druhů, neboli 5-prvkové kombinace s opakováním z prvků 4 druhů. Všech nákupů je tedy

$$K_0(5,4) = P_0(5,3) = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

b) od dvou druhů kávy mají deset balíčků a od zbývajících pouze po čtyřech balíčcích.
Na rozdíl od předchozího případu nemohou nastat nákupy, ve kterém kupujeme po pěti balíčcích od třetího nebo čtvrtého druhu, je jich tedy celkem o dva méně.
Odpověď: $56 - 2 = 54$.

1.70 Kolik různých neuspořádaných trojic mohou dát počty ok na jednotlivých kostkách při vrhu třemi kostkami? (Jde o obvyklou kostku s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách.)

Každý vrh je 3-prvkový soubor z prvků 6 druhů, neboli 3-prvkové kombinace s opakováním z prvků 6 druhů. Všech vrhů, neboli všech neuspořádaných trojic počtů ok je tedy

$$K_0(3,6) = P_0(3,5) = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$

1.76 Určete, kolika způsoby lze z padesátihaléřových a korunových mincí zaplatit částku a) 6 Kč, b) 2 Kč, jsou-li oba druhy mincí k dispozici v dostatečném množství.

a) Každou korunu z celkové částky můžeme zaplatit buď jednou korunovou, nebo dvěma padesátihaléřovými mincemi, tedy dva různé druhy platby jedné koruny.
Každá platba je 6-prvkový soubor z prvků 2 druhů, neboli 6-prvkové kombinace s opakováním z prvků 2 druhů. Všech způsobů plateb je tedy

$$K_0(6,2) = P_0(6,1) = \frac{7!}{6!1!} = 7.$$

b) Každá platba je 2-prvkový soubor z prvků 2 druhů, neboli 2-prvkové kombinace s opakováním z prvků 2 druhů. Všech způsobů plateb je tedy

$$K_0(2,2) = P_0(2,1) = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

1.77 Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit osm stejných jablek.

Každé rozdělení můžeme reprezentovat 8-prvkovým souborem $[\underbrace{A,\dots,A}_{a},\underbrace{B,\dots,B}_{b},\underbrace{C,\dots,C}_{c}]$, kde $a+b+c=8$, který vyjadřuje, že osoba A dostala a jablek, osoba B dostala b jablek a osoba C dostala c jablek.
Každé rozdělení je tedy 8-prvkový soubor z prvků 3 druhů, neboli 8-prvkové kombinace s opakováním z prvků 3 druhů. Počet všech rozdělení je pak

$$K_0(8,3) = P_0(8,2) = \frac{10!}{8!2!} = 45.$$

1.78 Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit čtyři stejná jablka a šest stejných hrušek.

Rozdělení jablek a hrušek jsou nezávislá.
Jablka:
Každé rozdělení jablek můžeme reprezentovat 4-prvkovým souborem $[\underbrace{A,\dots,A}_{a},\underbrace{B,\dots,B}_{b},\underbrace{C,\dots,C}_{c}]$, kde $a+b+c=4$, který vyjadřuje, že osoba A dostala a jablek, osoba B dostala b jablek a osoba C dostala c jablek.
Každé rozdělení je tedy 4-prvkový soubor z prvků 3 druhů, neboli 4-prvkové kombinace s opakováním z prvků 3 druhů. Počet všech rozdělení jablek je pak

$$K_0(4,3) = P_0(4,2) = \frac{6!}{4!2!} = 15.$$

Hrušky:
Každé rozdělení hrušek můžeme reprezentovat 6-prvkovým souborem $[\underbrace{A,\dots,A}_{a'},\underbrace{B,\dots,B}_{b'},\underbrace{C,\dots,C}_{c'}]$, kde $a'+b'+c'=6$, který vyjadřuje, že osoba A dostala a' hrušek, osoba B dostala b' hrušek a osoba C dostala c' hrušek.
Každé rozdělení je tedy 6-prvkový soubor z prvků 3 druhů, neboli 6-prvkové kombinace s opakováním z prvků 3 druhů. Počet všech rozdělení hrušek je pak

$$K_0(6,3) = P_0(6,2) = \frac{8!}{6!2!} = 28.$$

Odpověď, pomocí pravidla součinu: $15 \cdot 28 = 420$.

1.79 Určete, kolika způsoby lze všechny figurky šachové hry (tj. od každé barvy 1 krále, 1 dámu, 2 věže, 2 jezdce, 2 střelce a 8 pěšců) rozmístit na 64 políček šachovnice.

Kromě těchto figurek budeme formálně umísťovat 32 prázdných polí.
Budeme z těchto figurek tvořit pořadí s opakováním, přičemž první místo v pořadí bude reprezentovat pozici A1, druhé A2, až 64. pozici H8.
Počet všech rozmístění je tedy

$$P_0(\underbrace{1,1,2,2,2,8}_{\text{bílé}},\underbrace{1,1,2,2,2,8}_{\text{černé}},\underbrace{32}_{\text{prázdné}}) = \frac{64!}{(2!2!2!8!)^2 32!}.$$

1.80 Určete, kolika způsoby lze na černá políčka šachovnice 8×8 rozmístit 12 bílých (nerozlišitelných) a 12 černých (nerozlišitelných) kostek tak, aby toto rozmístění bylo symetrické.

Budeme umísťovat po 6 kostkách od každé barvy na jednu polovinu šachovnice, čímž kvůli symetrii bude dáno celé rozmístění.
Na jedné polovině je 16 černých políček, budeme tedy formálně umísťovat i 4 prázdné (nerozlišitelné) kostky.
Budeme z těchto kostek tvořit pořadí s opakováním, přičemž první místo v pořadí bude reprezentovat pozici A1, druhé A3, až 64. pozici H4.
Počet všech rozmístění je tedy

$$P_0(6,6,4) = \frac{16!}{6!6!4!} = 1\,681\,680.$$

1.81 Určete, kolika způsoby lze rozdat 18 knih žákům A, B, C tak, aby A a B dohromady měli dvakrát více knih než C.

Žák C musí dostat 6 knih, tedy 6-prvkovou množinu z 18 prvků, neboli 6-prvkovou kombinaci z 12 prvků.
Počet způsobů rozdání knih C je

$$K(6,18) = \binom{18}{6}.$$

Zbylých 12 knih, které si uspořádáme, rozdělujeme mezi A a B, přičemž každé rozdělení můžeme reprezentovat 12-prvkovou variací s opakováním z prvků A a B, přičemž fakt, že na i-tém místě je A, $i = 1, \ldots, 12$, znamená, že i-tou knihu dostane žák A.
Každé rozdělení mezi A a B je tedy 12-prvková variace s opakováním z prvků 2 druhů.
Počet způsobů rozdání zbylých knih mezi A a B je pak

$$V_0(12,2) = 2^{12}.$$

Odpověď, pomocí pravidla součinu: $\binom{18}{6} \cdot 2^{12}$.

1.82 Určete, kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z číslic čísla 238 831. (V těchto číslech se každá cifra vyskytuje nejvýše tolikrát, kolikrát se vyskytuje v daném čísle 238 831.)

Rozlišíme případy podle toho, zda se některá z cifer 3 a 8 vyskytuje vícekrát.
Obě cifry 3 a 8 dvakrát:
Takováto číslo jsou utvořena jako pořadí s opakováním ze dvou 8 a dvou 3. Je jich tedy

$$P_0(2,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Jedna z cifer 3 a 8 dvakrát:
Máme dvě možnosti, jak vybrat dvojnásobnou cifru. Na zbylá dvě místa vybíráme dvě cifry z cifer $2, 1$ a 8 nebo 3, máme tedy pro jejich výběr $K(2,3) = \binom{3}{2}$ možností. Sestavované číslo je pak tvořeno jako pořadí s opakováním ze dvou 3 či 8 a dvou cifer po jedné. Je jich tedy

$$2 \cdot K(2,3) \cdot P_0(2,1,1) = 2 \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{4!}{2!1!1!} = 72.$$

Žádná z cifer 3 a 8 dvakrát:
Zde je každé číslo tvořeno jako pořadí z prvků $1, 2, 3, 8$. Je jich tedy

$$P(4) = 4! = 24.$$

Odpověď: $6 + 72 + 24 = 102$.